

Wszystkie kobiety mają zielone oczy

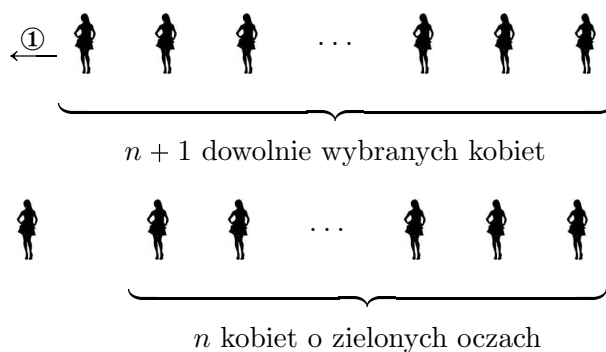
Kazimierz Jakubczyk

25 czerwca 2016

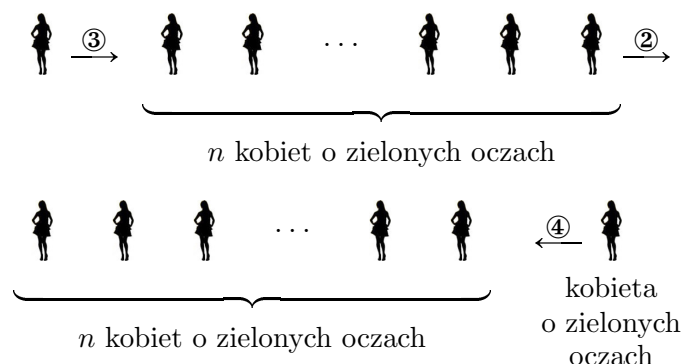
Rozumowanie

W celu wykazania tezy, którą głosi tytuł, posłużymy się *indukcją matematyczną*. Dla przypomnienia (matematyka na poziomie licealnym), indukcja matematyczna jest narzędziem dowodzenia, że pewne stwierdzenie o liczbie naturalnej n jest prawdziwe dla wszystkich $n \geq k$. Najpierw wykazujemy prawdziwość stwierdzenia dla możliwie małego k (zazwyczaj $k = 1$) – jest to tzw. *warunek początkowy*. Następnie dowodzimy prawdziwości stwierdzenia dla $n + 1$, zakładając że zostało ono udowodnione dla wszystkich wartości od k do n – jest to tzw. *krok indukcyjny*. Warunek początkowy jest często łatwy do sprawdzenia, zaś krok indukcyjny bywa trochę trudniejszy.

Przejdźmy teraz do udowodnienia, że *wszystkie kobiety mają zielone oczy*. Warunek początkowy dla $k = 1$ jest tu oczywisty – ot, choćby moja żona ma zielone oczy. W kroku indukcyjnym zakładamy, że każde n kobiet ($n \geq 1$) ma zielone oczy. Mamy udowodnić, że każde $n + 1$ kobiet też ma zielone oczy. Zaczynamy od ustawienia $n + 1$ dowolnie wybranych kobiet w szereg, po czym odstawiamy jedną z nich na bok (①). Na mocy założenia w kroku indukcyjnym wszystkie n kobiet stojących w szeregu ma zielone oczy.



Teraz z szeregu odstawiamy na bok jedną z nich (②, ma ona zielone oczy) i dołączamy tę, która na początku została z niego wyłączona (③). Znowu w szeregu stoi n kobiet, więc na mocy założenia indukcyjnego mają one zielone oczy. Na koniec do szeregu dołączamy tę kobietę, która stoi poza nim i, jak pamiętamy, ma zielone oczy (④). Mamy teraz w szeregu $n + 1$ kobiet, wszystkie o zielonych oczach, co kończy dowód.



Wniosek: jeżeli mężczyzna patrzy kobiecie w oczy i twierdzi, że są one czarne, niebieskie lub piwne, to albo nie widzi on koloru zielonego (ślepiec lub daltonista), albo jest kłamcą, albo nie jest to kobieta (w tym przypadku taki mężczyzna „idzie z duchem czasu”). A może jednak dowód zawiera błąd? Jeśli tak, to gdzie jest on ukryty?

Odpowiedź

Dowód kroku indukcyjnego jest jak najbardziej poprawny. Błąd, a właściwie oszustwo, bo wprowadzenie w błąd było zamierzone, tkwi w uzasadnieniu warunku początkowego dla $k = 1$. To, że moja żona ma zielone oczy, jest tylko przykładem potwierdzającym, że kobiety o zielonych oczach istnieją. Tu należało wykazać, że „każda jedna” (każda dowolnie wybrana) ma zielone oczy. Nawiasem mówiąc, dla laika takie stwierdzenie już pewnie orzeka, że wszystkie kobiety mają zielone oczy, ale zasada indukcji matematycznej wymaga drugiego kroku – uzasadnienia implikacji, że z prawdziwości stwierdzenia dla $n \geq 1$ wynika prawdziwość stwierdzenia dla $n + 1$. To tak samo, jakby dowód przez indukcję prawdziwości równości $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ dla wszystkich n całkowitych dodatnich zredukować tylko do sprawdzenia, że zachodzi ona dla $n = 1$.

* * * * *