Achilles i żółw (paradoks)

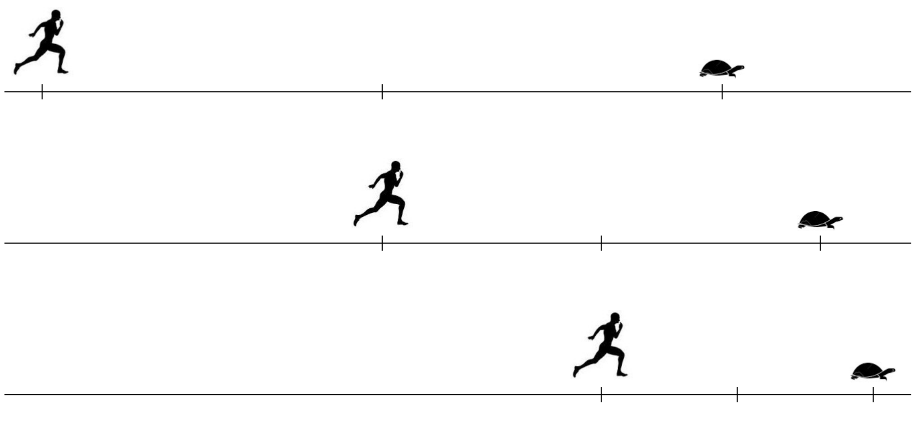
Kazimierz Jakubczyk

21 czerwca 2016

Paradoks Zenona

Zenon z Elei (ok. 490–430 r. p.n.e.), grecki filozof, sformułował szereg paradoksów dotyczących pojęcia nieskończoności, ruchu i ciągłości. Notabene, naukowego rozwiązania doczekały się one znacznie później, bo dopiero w XVII w. W jednym z nich dowodzi, że Achilles, uznawany wówczas za najszybszego biegacza, nigdy nie dogoni żółwia.

Achilles i żółw jednocześnie startują do biegu, żółw w pewnej odległości przed Achillesem. Gdy Achilles przebiegnie połowę początkowego dystansu, żółw pokona pewien odcinek drogi. Gdy Achilles przebiegnie połowę nowego dystansu, żółw znowu pokona pewien odcinek drogi, i tak dalej w nieskończoność. Wniosek, Achilles nigdy nie dogoni żółwia, mimo że biegnie od niego znacznie szybciej.



Na czym polega błąd w rozumowaniu Zenona?

Odpowiedź

Droga przemierzana przez Achillesa składa się z nieskończonej liczby półdystansów, ale ich suma jest skończona, stanowią one bowiem malejący ciąg geometryczny.

Istotnie, przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że Achilles jest tylko dwukrotnie szybszy od żółwia i że na początku żółw wyprzedza Achillesa o dystans d. W momencie, gdy Achilles przebiegnie połowę dystansu, tj. odcinek $\frac{1}{2}d$, żółw pokona $\frac{1}{4}$ dystansu i nowy dystans pomiędzy nimi wyniesie

$$\frac{1}{2}d + \frac{1}{4}d = \frac{3}{4}d$$

Gdy Achilles dotrze do połowy tego nowego dystansu, wynoszącej $\frac{3}{8}d$, żółw przesunie się o $\frac{3}{16}d$ i kolejny dystans między nimi wyniesie

$$\frac{3}{8}d + \frac{3}{16}d = \frac{9}{16}d$$

Kontynuując te obliczenia, otrzymujemy następujący ciąg półdystansów przemierzanych przez Achillesa:

$$a_1 = \frac{1}{2}d, \quad a_2 = \frac{3}{8}d = \frac{3}{4}a_1, \quad a_3 = \frac{9}{32}d = \frac{3}{4}a_2, \cdots$$

Jak widać, jest to ciąg geometryczny o ilorazie $q = \frac{3}{4}$. Stosując znany wzór na sumę wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o ilorazie $-1 < q < 1$, wyznaczamy całą drogę przebytą przez Achillesa aż do złapania żółwia:

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}d}{1-\frac{3}{4}} = 2d$$

Oczywiście żółw pokona w tym czasie dystans d.

Gdy w liceum przerabialiśmy materiał o ciągach geometrycznych, zadałem sobie pytanie: jak to możliwe, by suma nieskończonej liczby wyrazów, nawet niewyobrażalnie małych, była skończona. Moje wątpliwości prysły, gdy pomyślałem o ciągu $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \cdots$, wszak w tym przypadku sumowanie wyrazów ciągu to tylko „dopisywanie” kolejnej „jedynki”:

$$1.11111... = 1.(1)$$

* * * * *