Indukcja matematyczna - przykłady

Kazimierz Jakubczyk

8 września 2020

Co to jest indukcja matematyczna?

Indukcja matematyczna jest metodą dowodzenia twierdzeń (najczęściej równości i nierówności) dotyczących skończonej lub nieskończonej liczby przypadków ponumerowanych liczbami naturalnymi. Dowód twierdzenia tą metodą przebiega w dwóch krokach:

1. *Warunek początkowy.* Udowodnienie, że twierdzenie jest prawdziwe dla pewnej liczby naturalnej k (często $k = 1$).

2. *Krok indukcyjny.* Udowodnienie, że twierdzenie jest prawdziwe dla liczby $n + 1$ przy założeniu, że jest prawdziwe dla $n \geqslant k$.

Zasada indukcji matematycznej orzeka, że twierdzenie to jest prawdziwe dla wszystkich przypadków $n \geqslant k$. Warunek początkowy jest zazwyczaj łatwy do sprawdzenia, krok indukcyjny bywa trudniejszy.

Przykład 1. Udowodnić, że dla liczb naturalnych $n \geqslant 1$ zachodzi równość

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

1. Sprawdzamy warunek początkowy przy $k = 1$, czyli że powyższa równość jest spełniona dla $n = 1$:

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

2. W kroku indukcyjnym wykazujemy, że jeśli dla $n \geqslant 1$ prawdziwa jest równość (1), to jest ona również spełniona dla $n + 1$:

$$1 + 2 + ... + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Dowodzimy tego w następujący sposób:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + ... + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Z zasady indukcji matematycznej wynika, że równość (1) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$. Na dobrą sprawę najniższą wartością k jest 0 (suma zero składników jest równa 0).

Przykład 2. Udowodnić, że dla liczb naturalnych $n \geqslant 4$ zachodzi nierówność

$$n! > 2^n \tag{2}$$

1. Sprawdzamy spełnienie warunku początkowego, czyli że nierówność ta zachodzi dla $n = 4$:

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 > 16 = 2^4$$

2. W kroku indukcyjnym dowodzimy, że jeśli $n \geqslant 4$ jest liczbą naturalną spełniającą nierówność (2), to

$$(n+1)! > 2^{n+1}$$

Spełnienie tej nierówności jest łatwe do wykazania:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) > 2^n \cdot (n+1) > 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$$

Z zasady indukcji matematycznej wynika, że nierówność (2) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 4$. Zauważmy, że wartość k nie może być niższa od 4, ponieważ

$$0! = 1 = 2^0, \quad 1! = 1 < 2 = 2^1, \quad 2! = 2 < 4 = 2^2, \quad 3! = 6 < 8 = 2^3$$

Przykład 3. Udowodnić, że dla liczb naturalnych $n \geqslant 5$ zachodzi nierówność

$$2^n > n^2 \tag{3}$$

1. Warunek początkowy sprawdzamy w następujący sposób:

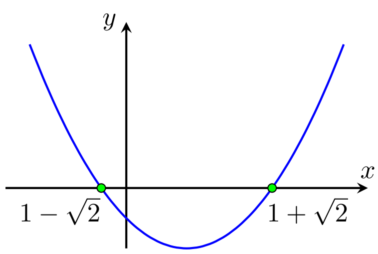
$$2^5 = 32 > 25 = 5^2$$

2. W kroku indukcyjnym zakładamy, że dla liczby $n \geqslant 5$ spełniona jest nierówność (3). Mamy wykazać, że przy tym założeniu zachodzi nierówność

$$2^{n+1} > (n+1)^2$$

Dowodzimy ją, dokonując następujących przekształceń (por. rys. poniżej):

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n > \\ &> 2 \cdot n^2 = n^2 + n^2 = n^2 + 2n + 1 + n^2 - 2n - 1 = \\ &= (n+1)^2 + (n^2 - 2n - 1) > (n+1)^2 \end{aligned}$$



Funkcja $y = x^2 - 2x - 1$

Przedstawiona na rysunku funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla $x \geqslant 3$, co pozwoliło na pominięcie drugiego składnika sumy i uzyskanie nierówności kończącej dowód kroku indukcyjnego. Nie można jednak obniżyć wartości k w warunku początkowym z 5 do 3, ponieważ nie byłby on spełniony:

$$2^3 = 8 < 9 = 3^2, \quad 2^4 = 16 = 4^2$$

Przykład 4. Udowodnić, że liczba $37^{500} - 37^{100}$ jest wielokrotnością 10*, tj. że ostatnią jej cyfrą jest 0. Sprawdzenie, czy to prawda, jest kłopotliwe ze względu na to, iż liczba ta jest bardzo duża, więc wyznaczenie jej zajęłoby wiele czasu. Łatwo jest jedynie stwierdzić, że jest ona parzysta, bowiem jeden i drugi jej składnik jest nieparzysty (ostatnią ich cyfrą jest 9, 3, 1 lub 7). Aby zatem udowodnić twierdzenie, wystarczy pokazać, że jest ona podzielna przez 5.

Nietrudno zauważyć, że rozpatrywaną liczbę można przedstawić w postaci $(37^{100})^5 - 37^{100}$ stanowiącej szczególny przypadek $n^5 - n$, w którym podstawiono $n = 37^{100}$. Gdyby zatem udało się udowodnić, że liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 5, postawiona na początku teza zostałaby wykazana.

1. Warunek początkowy wydaje się spełniony, ponieważ dla małych liczb $k = 1, 2, 3$ mamy:

$$1^5 - 1 = 0, \quad 2^5 - 2 = 30, \quad 3^5 - 3 = 240$$

2. W kroku indukcyjnym zakładamy, że dla $n \geqslant 1$ liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 5. Aby wykazać, że liczba $(n+1)^5 - (n+1)$ jest także podzielna przez 5, wykonujemy następujące przekształcenia algebraiczne:

$$\begin{aligned} (n+1)^5 - (n+1) &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 = \\ &= (n^5 - n) + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n) \end{aligned}$$

Na podstawie założenia indukcyjnego składnik $n^5 - n$ wyrażenia końcowego jest podzielny przez 5, a ponieważ jego drugi składnik jest również podzielny przez 5, to liczba $(n+1)^5 - (n+1)$ jest podzielna przez 5.

Ostatecznie po podstawieniu $n = 37^{100}$ wnioskujemy, że liczba $37^{500} - 37^{100}$ jest wielokrotnością 5, a ponieważ jest parzysta, jest wielokrotnością liczby 10, co kończy dowód.

* * *

*Kenneth A. Ross, Charles R. B. Wright, *Matematyka dyskretna*, PWN, Warszawa 2000.