

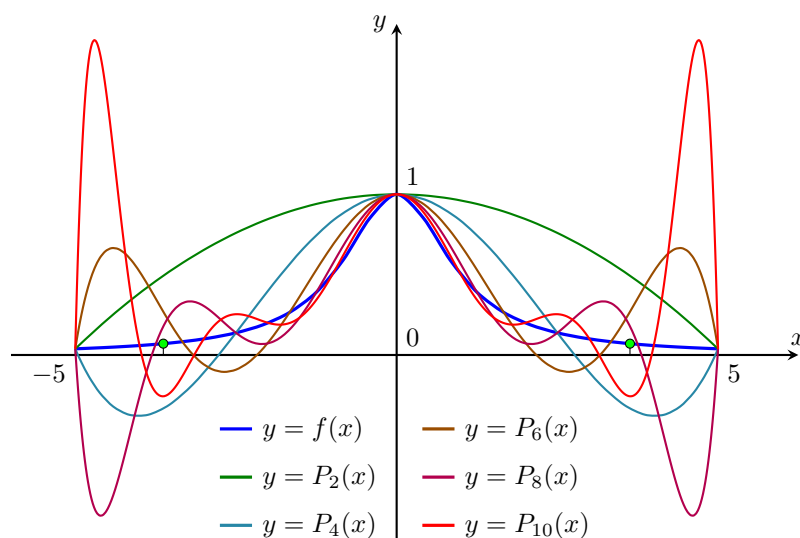
# Interpolacja funkcjami sklejanymi

Kazimierz Jakubczyk

19 lutego 2008\*

## Przykład Rungego

Jedyną możliwością uzyskania lepszego rozwiązania interpolacji wielomianowej jest zwiększenie stopnia wielomianu interpolacyjnego lub podział przedziału na podprzedziały i wyznaczenie odrębnego wielomianu interpolacyjnego w każdym podprzedziale (interpolacja przedziałowa). W obu przypadkach wymagane jest zwiększenie liczby węzłów. Nie jest to jednak możliwe, gdy funkcja interpolowana jest nieznana, a nawet gdy jest znana i bardzo regularna, otrzymane przybliżenie może być bezużyteczne. Interpolacja przedziałowa daje bowiem przybliżenie złożone z pewnej liczby wielomianów, które może nie być gładkie (brak pierwszej i drugiej pochodnej na granicy podprzedziałów), natomiast zwiększanie stopnia wielomianu interpolacyjnego może dać ciąg wielomianów interpolacyjnych, który nie musi być zbieżny do funkcji interpolowanej.



Rysunek 1: Interpolacja wielomianowa funkcji  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

\*Uzup. 24 lutego 2018, e-mail: kazimierz@jakubczyk.net

Przykładem takiej funkcji jest

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (-5 \leq x \leq 5)$$

i ciąg wielomianów interpolacyjnych  $\{P_n\}$  opartych na węzłach równoodległych

$$x_i = -5 + i \frac{10}{n} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

(Runge 1901). Pomimo że  $f$  jest nieskończenie różniczkowalna, to ciąg  $\{P_n(x)\}$  jest zbieżny do  $f(x)$  tylko dla  $|x| < 3,63\dots$  i rozbieżny dla  $|x| > 3,63\dots$  (por. rys. 1).

## Funkcje sklejane

Klasyczne funkcje sklejane wywodzą się z praktyki inżynierskiej. Przez wiele lat do kreślenia elementów konstrukcyjnych w przemyśle okrętowym i samochodowym używano elastycznej listewki drewnianej nazywanej *giętką* (ang. *spline*). Linią taki, prowadzony przez zadane punkty za pomocą stosownych ciężarków (zob. rys. 2), ugina się wzdłuż krzywej „najładziej”. Inna odmiana tej techniki rysowania krzywych gładkich polega na użyciu tzw. *krzywików*.



Rysunek 2: Giętka w praktyce (źródło: [www.alatown.com/spline](http://www.alatown.com/spline))

Linią używany przez kreślarza można traktować jak cienką belkę ulegającą odkształceniu pod wpływem działania sił zewnętrznych w danych punktach. Siły sprężyste liniału równoważą siły zginające, w wyniku czego przyjmuje on kształt krzywej „najładziej” — charakteryzującej się własnością minimalnej krzywizny.

Pojęcie gładkości krzywej uściślimy dla krzywych o równaniu  $y = f(x)$ , gdzie  $f \in C^2[a, b]$ . Krzywizna takiej krzywej w punkcie  $x$  wynosi

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}^3}$$

Niech będzie dany układ punktów  $x_0, x_1, \dots, x_n$  dzielących przedział  $[a, b]$  na  $n$  części, tj.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b. \quad (1)$$

Niech również będą dane wartości  $y_0, y_1, \dots, y_n$  w punktach tego podziału. Funkcja  $f \in C^2[a, b]$  interpolująca punkty  $(x_i, y_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) jest „najładzsza” w tym sensie, że spośród wszystkich funkcji klasy  $C^2[a, b]$  interpolujących te punkty daje najmniejszą wartość tzw. *krzywizny całkowitej* [1, 5]:

$$\int_a^b \kappa(x)^2 dx.$$

W praktyce trudno jest szukać rozwiązania zagadnienia interpolacji w postaci funkcji „najładzszej” z powodu skomplikowanego wyrażenia opisującego krzywiznę. Dla małych wartości  $|f'(x)|$  krzywizna funkcji  $f$  w punkcie  $x$  jest w przybliżeniu równa  $f''(x)$ . Uproszczenie to dostarcza interesującego rozwiązania w postaci *funkcji sklejaney trzeciego stopnia* (zob. twierdzenie 1 w sekcji *Jakość interpolacji*), które wystarcza w wielu zastosowaniach, nawet gdy wartości  $|f'(x)|$  nie są małe. Kryterium minimalnej krzywizny sprowadza się wówczas do minimalizacji całki

$$\int_a^b f''(x)^2 dx.$$

**Definicja 1.** Funkcję rzeczywistą  $s \in C^{m-1}[a, b]$  nazywamy funkcją sklejaną lub splajnem (ang. spline) stopnia  $m$  z węzłami (1), jeżeli w każdym z przedziałów  $[x_i, x_{i+1}]$  jest wielomianem stopnia co najwyżej  $m$ .

**Definicja 2.** Funkcję sklejaną stopnia  $2m+1$  z węzłami (1) nazywamy naturalną funkcją sklejaną, jeżeli w przedziałach  $(-\infty, a)$  i  $(b, \infty)$  jest wielomianem stopnia nie wyższego niż  $m$ .

Funkcja sklejana stopnia 0 jest schodkową (przedziałami stałą), a funkcja sklejana stopnia 1 jest łamaną. W praktyce najczęściej są używane funkcje sklepane stopnia 3, nazywane też *sześciennymi* lub *kubicznymi*. Naturalna funkcja sklejana stopnia 3 jest poza przedziałem  $[a, b]$  wielomianem stopnia 1.

## Obliczanie funkcji sklepanych

Szukamy takiej funkcji sklejaney  $s$  trzeciego stopnia, która w węzłach  $x_i$  ma dane wartości  $y_i$  i która w każdym z przedziałów  $[x_i, x_{i+1}]$  jest wielomianem stopnia nie wyższego niż 3. Niech

$$M_i = s''(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Ponieważ  $s$  jest w przedziale  $[x_i, x_{i+1}]$  wielomianem stopnia co najwyżej trzeciego, funkcja  $s''$  jest tam liniowa:

$$s''(x) = \frac{M_{i+1} - M_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + M_i.$$

Całkując dwukrotnie obie strony tej tożsamości, otrzymujemy najpierw

$$s'(x) = \frac{M_{i+1} - M_i}{2(x_{i+1} - x_i)}(x - x_i)^2 + M_i(x - x_i) + C_i, \quad (2)$$

a następnie

$$s(x) = \frac{M_{i+1} - M_i}{6(x_{i+1} - x_i)}(x - x_i)^3 + \frac{M_i}{2}(x - x_i)^2 + C_i(x - x_i) + y_i \quad (3)$$

(stała całkowania  $y_i$  wynika z warunku interpolacji  $s(x_i) = y_i$ ). Z powyższej równości i warunku  $s(x_{i+1}) = y_{i+1}$  otrzymujemy

$$y_{i+1} = \frac{M_{i+1} - M_i}{6(x_{i+1} - x_i)}(x_{i+1} - x_i)^3 + \frac{M_i}{2}(x_{i+1} - x_i)^2 + C_i(x_{i+1} - x_i) + y_i,$$

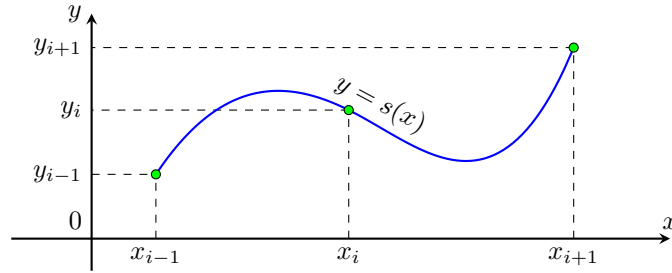
a stąd

$$C_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{M_{i+1} + 2M_i}{6}(x_{i+1} - x_i). \quad (4)$$

Wobec (2) i (4) funkcja  $s'$  daje się opisać w przedziale  $[x_i, x_{i+1}]$  wzorem

$$s'(x) = \frac{M_{i+1} - M_i}{2(x_{i+1} - x_i)}(x - x_i)^2 + M_i(x - x_i) + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{M_{i+1} + 2M_i}{6}(x_{i+1} - x_i), \quad (5)$$

w którym nieznanne są wielkości  $M_i$  i  $M_{i+1}$ .



Rysunek 3: Gładkie przejście funkcji  $s$  w punktach  $x_i$

Porównajmy dwa wyrażenia (5) reprezentujące wartość  $s'(x_{i+}) = s'(x_i-)$ , odpowiadające przejściu od przedziału  $[x_{i-1}, x_i]$  do  $[x_i, x_{i+1}]$  (zob. rys. 3). Dla indeksu  $i - 1$  oraz  $i$  otrzymujemy po prostych przekształceniach:

$$s'(x_{i+}) = \frac{2M_i + M_{i-1}}{6}(x_i - x_{i-1}) + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}},$$

$$s'(x_{i-}) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{M_{i+1} + 2M_i}{6}(x_{i+1} - x_i).$$

Przyrównując obie wartości do siebie, dostajemy

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1),$$

gdzie

$$\lambda_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}}, \quad \mu_i = 1 - \lambda_i,$$

$$d_i = \frac{6}{x_{i+1} - x_{i-1}} \left( \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right).$$

Otrzymaliśmy układ  $n-1$  równań liniowych z niewiadomymi  $M_0, M_1, \dots, M_n$ . Ponieważ niewiadomych jest  $n+1$ , rozwiązanie go wymaga określenia dodatkowych warunków, które zapiszemy w postaci dwóch równań liniowych — jednego na początku, drugiego na końcu tego układu:

$$\begin{aligned} 2M_0 + M_1 \lambda_0 &= d_0, \\ \mu_n M_{n-1} + 2M_n &= d_n. \end{aligned} \quad (6)$$

Pełny układ w zapisie macierzowym wygląda wtedy następująco:

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Powróćmy do określenia współczynników dwóch dodatkowych równań (6). Najprościej przyjąć  $M_0 = M_n = 0$ , tj.

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0, & d_0 &= 0, \\ \mu_n &= 0, & d_n &= 0. \end{aligned}$$

Daje to normalną funkcję sklejaną trzeciego stopnia, która na lewo i na prawo od przedziału  $[a, b]$  jest wielomianem pierwszego stopnia, co odpowiada liniałowi elastycznemu, którego końce są swobodne.

Inny sensowny wybór współczynników dodatkowych równań dotyczy liniału o usztywnionych końcach, np. umieszczonych w wmurowanych rurach, w których mogą się one przesuwać. Inaczej mówiąc, warunki dające naturalną funkcję sklejaną zastępujemy warunkami brzegowymi postaci

$$s'(x_0) = y'_0, \quad s'(x_n) = y'_n,$$

gdzie  $y'_0$  i  $y'_n$  są danymi nachyleniami końców liniału. Korzystając z równania (5) przedstawiającego postać funkcji  $s'$ , łatwo uzyskać współczynniki obu tych równań:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1, & d_0 &= \frac{6}{x_1 - x_0} \left( \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} - y'_0 \right), \\ \mu_n &= 1, & d_n &= \frac{6}{x_n - x_{n-1}} \left( y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \right). \end{aligned}$$

Oczywiście można określać wariant mieszany, przyjmując jeden koniec swobodny a drugi usztywniony. Rozpatruje się również *okresowe funkcje sklejané*, które w końcach przedziału  $[a, b]$  przyjmują takie same wartości wraz z pierwszymi pochodnymi [1, 3, 6].

Macierz układu równań (7) wiążącego niewiadome  $M_0, M_1, \dots, M_n$  jest trójdzielna, a ponieważ

$$\mu_i + \lambda_i = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

oraz  $\lambda_0$  i  $\mu_n$  są równe 0 lub 1, jej główna przekątna jest dominująca. Dowodzi się, że macierz o tej własności jest nieosobliwa [5], toteż układ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Można je łatwo wyznaczyć, stosując uproszczony wariant metody Gaussa. Mianowicie, eliminując jedynie elementy leżące tuż pod główną przekątną, otrzymujemy

$$\begin{aligned} M_i &= q_i M_{i+1} + u_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \\ M_n &= u_n, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} q_0 &= -\frac{\lambda_0}{2}, & u_0 &= \frac{d_0}{2}, \\ q_i &= -\frac{\lambda_i}{\mu_i q_{i-1} + 2}, & u_i &= \frac{d_i - \mu_i u_{i-1}}{\mu_i q_{i-1} + 2} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ u_n &= \frac{d_n - \mu_n u_{n-1}}{\mu_n q_{n-1} + 2}. \end{aligned}$$

Ostatnie równanie daje bezpośrednio wartość niewiadomej  $M_n$ , pozostałe obliczamy w kolejności  $M_{n-1}, M_{n-2}, \dots, M_0$ .

Algorytm wyznaczania wartości  $M_0, M_1, \dots, M_n$  można zaprogramować następująco (Pascal):

```

if lewy_koniec_swobodny then
begin
  q[0] := 0;
  u[0] := 0;
end else
begin
  q[0] := -0.5;
  u[0] := 3*((y[1]-y[0])/(x[1]-x[0])-yp0)/(x[1]-x[0]);
end;
for i := 1 to n-1 do
begin
  lambda := (x[i+1]-x[i])/(x[i+1]-x[i-1]);
  mi := 1-lambda;
  d := 6*((y[i+1]-y[i])/(x[i+1]-x[i])-
    (y[i]-y[i-1])/(x[i]-x[i-1]))/(x[i+1]-x[i-1]));
  q[i] := -lambda/(mi*q[i-1]+2);
  u[i] := (d-mi*u[i-1])/(mi*q[i-1]+2);
end;
if prawy_koniec_swobodny then M[n] := 0 else
begin
  d := 6*(ypn-(y[n]-y[n-1])/(x[n]-x[n-1]))/(x[n]-x[n-1]);
  M[n] := (d-u[n-1])/(q[n-1]+2);
end;
for i := n-1 downto 0 do
  M[i] := q[i]*M[i+1]+u[i];

```

W algorytmie przyjęto, że dwie zmienne logiczne *lewy\_koniec\_swobodny* i *prawy\_koniec\_swobodny* zawierają informację o warunkach brzegowych: wartość *true*

oznacza, że stosowny koniec liniału elastycznego jest swobodny, a *false*, że jest usztywniony. Ponadto zmienne *yp0* i *ypn* mają — odpowiednio — wartości  $y'_0$  i  $y'_n$ , gdy końce liniału są usztywnione.

Po obliczeniu wielkości  $M_0, M_1, \dots, M_n$  można wyznaczać wartości funkcji sklejanej  $s$ , korzystając ze wzoru (3) oraz wzoru (4) określającego wartość współczynnika  $C_i$  przy  $(x - x_i)$ . Aby uniknąć wielokrotnego obliczania wartości współczynników przy  $(x - x_i)^3$  i  $(x - x_i)^2$ , warto je również wyznaczyć:

$$A_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6(x_{i+1} - x_i)}, \quad B_i = \frac{M_i}{2}. \quad (8)$$

Wówczas do obliczania wartości funkcji  $s$  można stosować prostszy wzór

$$s(x) = A_i(x - x_i)^3 + B_i(x - x_i)^2 + C_i(x - x_i) + y_i, \quad (9)$$

w którym  $A_i$  i  $B_i$  są określone równościami (8), a  $C_i$  równością (4).

Aby obliczyć wartość  $w = s(t)$  funkcji sklejanej  $s$  w punkcie  $t \in [a, b]$ , trzeba najpierw ustalić, do którego z przedziałów  $[x_i, x_{i+1}]$  należy punkt  $t$ . W poniższym algorytmie dokonuje się tego, przeglądając je od strony prawej do lewej. Po znalezieniu odpowiedniego przedziału wyznaczana jest wartość (9) właściwego wielomianu trzeciego stopnia według schematu Hornera:

```

i := n;
repeat
  i := i-1;
  dt := t-x[i];
until (i = 0) or (dt >= 0);
w := ((A[i]*dt + B[i])*dt + C[i])*dt + y[i];

```

Zauważmy, że dla punktów  $t$  spoza przedziału  $[x_0, x_n]$  wybierane są skrajne wielomiany. I tak, dla  $t < x_0$  wybierany jest wielomian z przedziału  $[x_0, x_1]$ , a dla  $t > x_n$  z przedziału  $[x_{n-1}, x_n]$ . Algorytm można łatwo rozbudować, by uwzględnił naturalne funkcje sklejane, które w przedziałach  $(-\infty, x_0)$  i  $(x_n, \infty)$  są wielomianami stopnia co najwyżej pierwszego. Istotnie, jeśli  $s'_0$  i  $s'_n$  są wartościami pochodnej funkcji  $s$  w punktach  $x_0$  i  $x_n$ , to wobec równości  $M_0 = M_n = 0$  i wzoru (5) mamy dla indeksów  $i = 0$  i  $i = n - 1$ :

$$s'_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} - \frac{M_1}{6}(x_1 - x_0),$$

$$s'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} + \frac{M_{n-1}}{6}(x_n - x_{n-1}),$$

skąd

$$s(x) = y_0 + s'_0(x - x_0) \quad (-\infty < x < x_0),$$

$$s(x) = y_n + s'_n(x - x_n) \quad (x_n < x < \infty).$$

W obliczeniach numerycznych może być również użyteczne przedstawienie funkcji sklejanej  $s$  w każdym z przedziałów  $[x_i, x_{i+1}]$  w postaci wielomianu zmiennej  $x$ :

$$s(x) = \alpha_i x^3 + \beta_i x^2 + \gamma_i x + \delta_i. \quad (10)$$

Łatwo jest je uzyskać ze wzoru (9), stosując wzory skróconego mnożenia do potęg  $(x - x_i)^3$  i  $(x - x_i)^2$ .

**Przykład 1.** Zastosowanie zaprezentowanego wyżej algorytmu do wyznaczenia naturalnej funkcji skleianej  $s$  trzeciego stopnia interpolującej punkty

$x_i$	-4	-3	-1	$\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	6	8
$y_i$	1	3	$3\frac{1}{2}$	5	$5\frac{1}{2}$	4	1

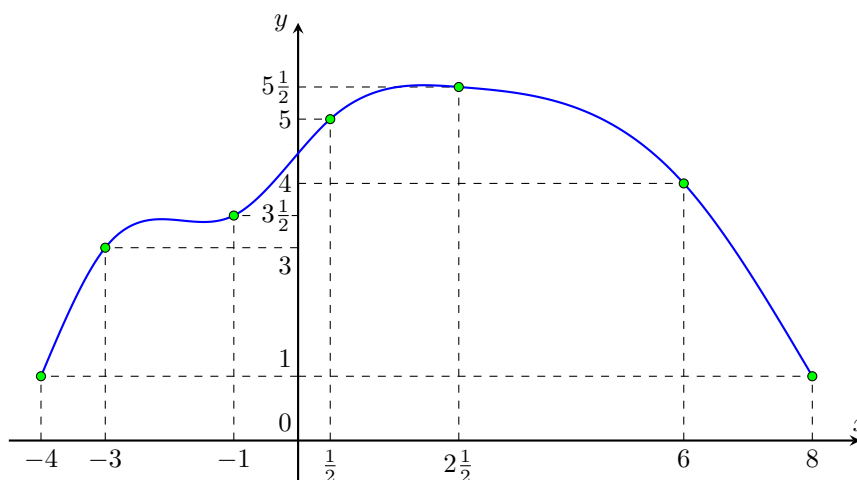
( $n = 6$ ) prowadzi do następującego rozwiązania układu (7):

$$M_0 = 0, \quad M_1 = -2.246771, \quad M_2 = 1.490312, \quad M_3 = -0.959095, \\ M_4 = -0.010902, \quad M_5 = -0.580947, \quad M_6 = 0$$

Stąd i równości (9) po przekształceniu do postaci (10) otrzymujemy

$$s(x) = \begin{cases} -0.37446x^3 - 4.49354x^2 - 15.59970x - 13.46771 & (-4 \leq x < -3) \\ 0.31142x^3 + 1.67943x^2 + 2.91920x + 5.05120 & (-3 \leq x < -1) \\ -0.27216x^3 - 0.07131x^2 + 1.16846x + 4.46762 & (-1 \leq x < \frac{1}{2}) \\ 0.07902x^3 - 0.59807x^2 + 1.43184x + 4.42372 & (\frac{1}{2} \leq x < 2\frac{1}{2}) \\ -0.02714x^3 + 0.19814x^2 - 0.55868x + 6.08249 & (2\frac{1}{2} \leq x < 6) \\ 0.04841x^3 - 1.16189x^2 + 7.60150x - 10.23787 & (6 \leq x \leq 8). \end{cases}$$

Wykres tej funkcji skleianej jest pokazany na rysunku 4.



Rysunek 4: Interpolująca funkcja sklejana trzeciego stopnia

## Jakość interpolacji

Istnienie i jednoznaczność funkcji skleianej trzeciego stopnia interpolującej dane punkty wynika z faktu, że macierz układu równań liniowych (7) jest nieosobliwa. Interpolująca funkcja sklejana jest w pewnym sensie „najładniejszą” funkcją interpolującą.



**Twierdzenie 1.** Jeżeli funkcja  $f$  jest klasy  $C^2[a, b]$  i  $s$  jest naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia interpolującą  $f$  w węzłach (1), to

$$\int_a^b [s''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f''(x)]^2 dx.$$

*Dowód.* Niech  $g \equiv f - s$ . Mamy zatem  $f'' \equiv s'' + g''$ , a stąd

$$\int_a^b [f''(x)]^2 dx = \int_a^b [s''(x)]^2 dx + 2 \int_a^b s''(x) g''(x) dx + \int_a^b [g''(x)]^2 dx.$$

Wystarczy pokazać, że druga całka po prawej stronie powyższej równości znika. Całkując przez części, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_a^b s''(x) g''(x) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} s''(x) g''(x) dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ s''(x_i) g'(x_i) - s''(x_{i-1}) g'(x_{i-1}) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} s'''(x) g'(x) dx \right] = \\ &= s''(b) g'(b) - s''(a) g'(a) - \sum_{i=1}^n c_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} g'(x) dx = \\ &= s''(b) g'(b) - s''(a) g'(a) - \sum_{i=1}^n c_i [g(x_i) - g(x_{i-1})], \end{aligned}$$

gdzie  $c_i$  są stałymi takimi, że  $c_i = s'''(x)$  dla  $x \in [x_{i-1}, x_i]$  (funkcja  $s'''$  jest przedziałami stała). Z definicji funkcji  $g$  wynika, że  $g(x_i) = 0$ , zatem

$$\int_a^b s''(x) g''(x) dx = s''(b) g'(b) - s''(a) g'(a). \quad (11)$$

Wyrażenie po prawej stronie tej równości jest równe zero, gdy warunki brzegowe określają naturalną funkcję sklejaną (swobodne końce):

$$s''(a) = s''(b) = 0.$$

□

Jeżeli warunki określające naturalną funkcję sklejaną zastąpimy warunkami alternatywnymi (usztywnione końce) postaci:

$$s'(a) = f'(a) = y'_0, \quad s'(b) = f'(b) = y'_n,$$

twierdzenie pozostaje prawdziwe, ponieważ nadal całka (11) znika:

$$s''(b) g'(b) - s''(a) g'(a) = s''(b) [f'(b) - s'(b)] - s''(a) [f'(a) - s'(a)] = 0.$$

Wbrew zachowaniu się wielomianów interpolacyjnych (zjawisko Rungego — por. rys. 1) funkcje sklepane są zbliżone do funkcji, którą interpolują, jeżeli tylko wybieramy coraz drobniejsze podziały rozpatrywanego przedziału  $[a, b]$ . Wynika to z poniższego twierdzenia dotyczącego oszacowania błędu interpolacji funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia [3] (bez dowodu).

**Twierdzenie 2.** Jeżeli funkcja  $f$  jest klasy  $C^2[a, b]$  i  $s$  jest naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia interpolującą  $f$  w węzłach (1), to dla każdego  $x \in [a, b]$  zachodzi nierówność

$$|f(x) - s(x)| \leq 5M \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})^2, \quad (12)$$

gdzie

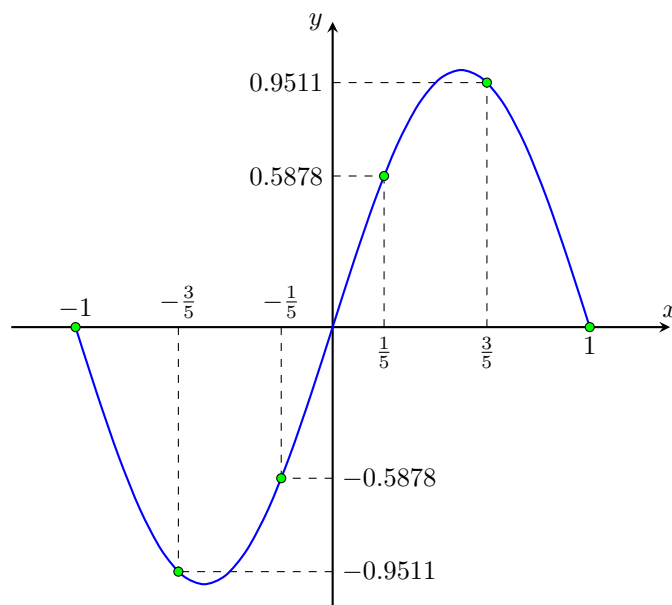
$$M = \max_{a \leq \xi \leq b} |f''(\xi)|.$$

Intencją twierdzenia 2 jest ukazanie odmiennego charakteru interpolujących funkcji sklejanych w porównaniu z wielomianami, których zachowanie może być katastroficznie chaotyczne. Oszacowanie (12) bywa jednak zbyt grube, by miało jakiegokolwiek znaczenie praktyczne.

**Przykład 2.** Naturalna funkcja sklejana  $s$  trzeciego stopnia interpoluje funkcję  $y = \sin(\pi x)$  w przedziale  $[-1, 1]$  przy równoodległych węzłach dla  $n = 5$ :

$$-1 < -\frac{3}{5} < -\frac{1}{5} < \frac{1}{5} < \frac{3}{5} < 1$$

(por. rys. 5). Oszacowanie (12) błędów tej interpolacji wynosi  $5\pi^2 \cdot (\frac{2}{5})^2 \approx 7.8957$ , co wyraża się wielkością niewyobrażalnie zawyżoną.



Rysunek 5: Funkcja sklejana interpolująca funkcję  $\sin(\pi x)$

W celu znalezienia rzeczywistego błędów interpolacji rozwiązujemy stosowny układ równań (7), uzyskując następujące wyniki:

$$M_0 = 0, \quad M_1 = 10.672787, \quad M_2 = 6.596145, \\ M_3 = -6.596145, \quad M_4 = -10.672787, \quad M_5 = 0.$$

Następnie wobec (9), po przekształceniu do postaci (10), otrzymujemy jawną postać funkcji interpolującej:

$$s(x) = \begin{cases} 4.44699x^3 + 13.34098x^2 + 10.25182x + 1.35783 & (-1 \leq x < -\frac{3}{5}) \\ -1.69860x^3 + 2.27891x^2 + 3.61458x + 0.03039 & (-\frac{3}{5} \leq x < -\frac{1}{5}) \\ -5.49679x^3 + 3.15880x & (-\frac{1}{5} \leq x < \frac{1}{5}) \\ -1.69860x^3 - 2.27891x^2 + 3.61458x - 0.03039 & (\frac{1}{5} \leq x < \frac{3}{5}) \\ 4.44699x^3 - 13.34098x^2 + 10.25182x - 1.35783 & (\frac{3}{5} \leq x \leq 1). \end{cases}$$

Wreszcie, posługując się prostym programem komputerowym wyznaczającym różnicę wartości obydwu funkcji w dużej liczbie punktów przedziału  $[-1, 1]$ , znajdujemy rzeczywisty błąd interpolacji wynoszący 0.008965. Jest on niezauważalny na rysunku 5 (wykresy obu funkcji się pokrywają).

## Baza funkcji sklejaných

Każdą funkcję sklejaną trzeciego stopnia można dla danego układu węzłów (1) przedstawić w postaci kombinacji liniowej

$$s(x) = c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3 + \sum_{i=1}^{n-1} c_{i+3}(x - x_i)_+^3, \quad (13)$$

gdzie

$$(x - x_i)_+ = \begin{cases} 0 & (x - x_i \leq 0) \\ x - x_i & (x - x_i > 0) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Bazę tej przestrzeni wektorowej funkcji sklejaných stanowią jednomiany  $x^3$ ,  $x^2$ ,  $x$  i 1 oraz  $n-1$  obciętych funkcji potęgowych  $(x - x_i)_+^3$ .

Współczynniki  $c_i$  dają się łatwo obliczać. Istotnie, wszystkie obcięte funkcje potęgowe znikają w przedziale  $(-\infty, x_1]$ , dlatego współczynniki  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  i  $c_3$  są wobec (10) równe odpowiednim współczynnikom wielomianu

$$p_0(x) = \alpha_0x^3 + \beta_0x^2 + \gamma_0x + \delta_0,$$

który jest zawężeniem funkcji sklejaney  $s$  do przedziału  $[x_0, x_1]$ . Wraz z każdym przejściem przez węzeł  $x_i$  do następnego przedziału  $[x_i, x_{i+1}]$  do wielomianu

$$p_{i-1}(x) = \alpha_{i-1}x^3 + \beta_{i-1}x^2 + \gamma_{i-1}x + \delta_{i-1},$$

będącego zawężeniem funkcji  $s$  do przedziału  $[x_{i-1}, x_i]$ , dodawany jest kolejny składnik  $c_{i+3}(x - x_i)_+^3$  znikający dla  $x \leq x_i$  wraz ze swoją pierwszą i drugą pochodną. Ta właściwość jest konsekwencją założenia o ciągłości krzywizny funkcji  $s$ . Z kolei z warunku interpolacyjnego  $s(x_{i+1}) = y_{i+1}$  wynika równość

$$p_{i-1}(x_{i+1}) + c_{i+3}(x_{i+1} - x_i)^3 = y_{i+1},$$

która określa prostą procedurę obliczania współczynników przy obciętych funkcjach potęgowych:

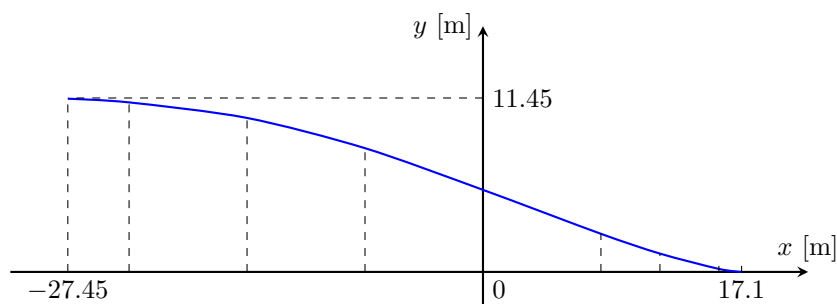
$$c_{i+3} = \frac{y_{i+1} - p_{i-1}(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)^3} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Wzór (13) znajduje praktyczne zastosowanie w obliczeniach komputerowych nie tylko ze względu na wygodny sposób wyznaczania wartości funkcji sklejanych trzeciego stopnia, lecz i z uwagi na minimalną liczbę wymaganych do obliczeń danych. Łączna ich liczba wynosi bowiem  $2n + 4$  ( $n + 1$  węzłów i  $n + 3$  współczynniki), podczas gdy w przypadku wzorów (3) potrzeba  $3n + 3$  danych (węzły  $x_i$  oraz wartości  $y_i$  i  $M_i$ ), zaś w przypadku wzorów (9) i (10) aż  $5n + 1$  danych (węzły i współczynniki wielomianów).

Obcięte funkcje potęgowe nie mają dobrych własności numerycznych [4], lecz w przypadku niezbyt dużych wartości  $n$  nie ma to znaczenia.

**Przykład 3.** W poniższej tabeli podano węzły i współczynniki funkcji sklejanej (13) dla  $n = 8$  (źródło: [2]). Funkcja ta reprezentuje dziobową część wodnicy statku. Jej wykres pokazany jest na rysunku 6.

$i$	$x_i$	$c_i$
0	-27.45	0.001529536
1	-23.40	0.105035831
2	-15.60	2.308940510
3	-7.80	27.322024800
4	0.00	-0.001846248
5	7.80	0.000450526
6	11.70	0.000103903
7	15.60	-0.000045882
8	17.10	0.000374533
9		-0.000195034
10		0.024243101



Rysunek 6: Dziobowa część wodnicy statku

## Uwagi końcowe

Interpolację funkcjami sklejonymi można zastosować do wyznaczenia krzywej gładkiej przechodzącej przez dane punkty  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . Przyjmując jako węzły wartości  $t_i = i$ , można interpolować punkty  $(t_i, x_i)$  i  $(t_i, y_i)$  za pomocą dwóch funkcji sklejanych  $s_x$  i  $s_y$  zmiennej  $t$ , które dają parametryczne

przybliżenie krzywej  $x = s_x(t)$  i  $y = s_y(t)$  dla  $t \in [0, n]$ . W przypadku krzywej zamkniętej należy użyć okresowych funkcji sklejaných.

W pewnych zadaniach stosuje się funkcje sklepane wyższych stopni, a także inne ich odmiany, np. *hiperboliczne* funkcje sklepane i funkcje *B-sklepane* [5] oraz krzywe i powierzchnie sklepane [4].

## Literatura

- [1] Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L.: *The Theory of Splines and Their Applications*, Academic Press, New York and London 1967.
- [2] Jakubczyk K.: *Aproksymacja kołowa krzywych okrętowych w Systemie ASTER, XPS-026* (publ. wewnętrzna), Centralny Ośrodek Konstrukcyjno-Badawczy Przemysłu Okrętowego, Gdańsk 1970.
- [3] Jankowscy J. i M.: *Przegląd metod i algorytmów numerycznych, część 1*, WNT, Warszawa 1981.
- [4] Kiciak P.: *Podstawy modelowania krzywych i powierzchni*, WNT, Warszawa 2000, 2005 (wydanie 2 rozszerzone).
- [5] Kincaid D., Cheney W.: *Analiza numeryczna*, WNT, Warszawa 2006.
- [6] Stoer J.: *Wstęp do metod numerycznych, tom 1*, PWN, Warszawa 1979.

\* \* \*