Interpolacja wielomianowa

Kazimierz Jakubczyk

18 lutego 2008*

Zagadnienie interpolacji wielomianowej

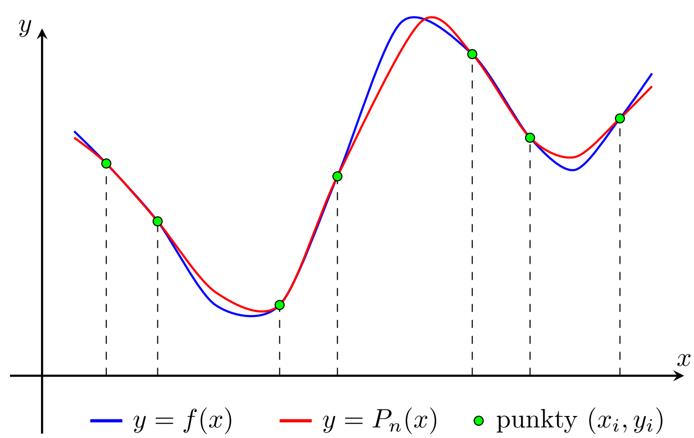
Zakładamy, że danych jest $n+1$ punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ i wartości $y_0, y_1, \ldots, y_n$ pewnej funkcji f (znanej lub nieznanej) w tych punktach:

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Klasyczne (najstarsze i najprostsze) zagadnienie interpolacji wielomianowej polega na znalezieniu wielomianu P_n stopnia co najwyżej n takiego, że spełnione są warunki

$$y_i = P_n(x_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, n) \tag{1}$$

(por. rys. 1). Mówimy wtedy, że wielomian P_n *interpoluje* wartości y_i w węzłach x_i, a także, że wielomian P_n interpoluje funkcję f.



Rysunek 1: Interpolacja wielomianowa funkcji

*Uzup. 13 lutego 2018, e-mail: `kazimierz@jakubczyk.net`

Istnienie i jednoznaczność rozwiązania

Twierdzenie 1. *Jeżeli liczby $x_0, x_1, \ldots, x_n$ są parami różne, to dla dowolnych wartości $y_0, y_1, \ldots, y_n$ istnieje dokładnie jeden wielomian P_n stopnia nie wyższego niż n spełniający warunki* (1).

Dowód. Jednoznaczność (dowód nie wprost). Przypuśćmy, że istnieją dwa wielomiany P_n i Q_n stopnia co najwyżej n spełniające warunki

$$P_n(x_i) = Q_n(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Wówczas różnica $R_n \equiv P_n - Q_n$ byłaby wielomianem stopnia nie wyższego niż n znikającym w $n+1$ różnych punktach. Ponieważ jednak wielomian stopnia co najwyżej n nieznikający tożsamościowo może mieć nie więcej niż n zer, więc $P_n \equiv Q_n$ (sprzeczność).

Istnienie (*wzór interpolacyjny Lagrange'a*). Dla $i = 0, 1, \ldots, n$ funkcje pomocnicze

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)} \tag{2}$$

są wielomianami stopnia dokładnie n takimi, że

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

(δ_{ij} jest tzw. *deltą Kroneckera*). Wynika stąd, że

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{3}$$

jest wielomianem stopnia co najwyżej n przyjmującym w węzłach x_i wartości y_i, co dowodzi istnienia rozwiązania zagadnienia interpolacji wielomianowej. $\square$

Zauważmy, że funkcje pomocnicze $L_0, L_1, \ldots, L_n$ są wielomianami wyrażającymi się tylko poprzez węzły interpolacji $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (wartości $y_0, y_1, \ldots, y_n$ są nieistotne).

Przykład 1. W celu znalezienia wielomianu P_3 stopnia co najwyżej 3 interpolującego wartości y_i w węzłach x_i:

x_i	-4	-1	0	2
y_i	-4	1	-2	3

posłużymy się wzorem interpolacyjnym Lagrange'a (3).

Najpierw wyznaczamy funkcje pomocnicze L_0, L_1, L_2 i L_3, stosując wzór (2) dla $n = 3$. Proste obliczenia prowadzą do następującej ich postaci:

$$L_0(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(-4+1)(-4-0)(-4-2)} = -\frac{1}{72}(x+1)x(x-2),$$

$$L_1(x) = \frac{(x+4)(x-0)(x-2)}{(-1+4)(-1-0)(-1-2)} = \frac{1}{9}(x+4)x(x-2),$$

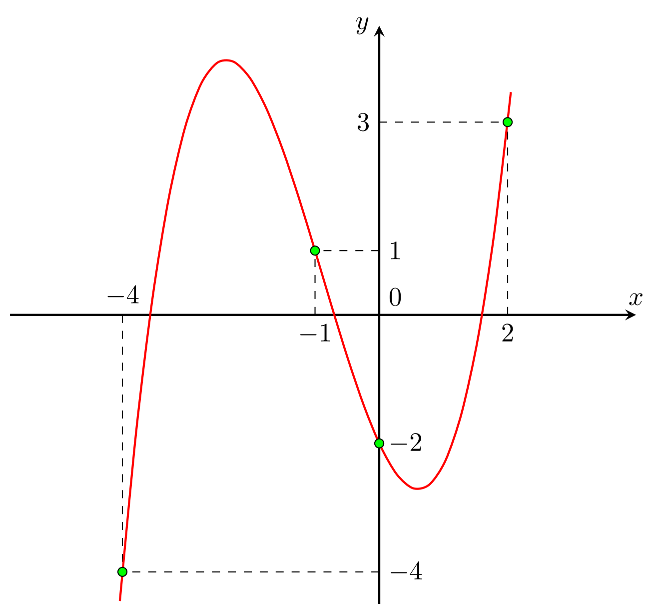
$$L_2(x) = \frac{(x+4)(x+1)(x-2)}{(0+4)(0+1)(0-2)} = -\frac{1}{8}(x+4)(x+1)(x-2),$$

$$L_3(x) = \frac{(x+4)(x+1)(x-0)}{(2+4)(2+1)(2-0)} = \frac{1}{36}(x+4)(x+1)x.$$

Stąd i (3) otrzymujemy

$$\begin{aligned} P_3(x) &= -4L_0(x) + L_1(x) - 2L_2(x) + 3L_3(x) = \\ &= \frac{1}{18}(x+1)x(x-2) + \frac{1}{9}(x+4)x(x-2) + \\ &\quad + \frac{1}{4}(x+4)(x+1)(x-2) + \frac{1}{12}(x+4)(x+1)x = \\ &= \frac{1}{2}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{13}{6}x - 2. \end{aligned}$$

Wykres tego wielomianu jest pokazany na rysunku 2.



Rysunek 2: Wielomian interpolacyjny $y = P_3(x)$

Wybór bazy wielomianowej

Wzór interpolacyjny Lagrange'a przedstawia wielomian interpolacyjny P_n jako kombinację liniową, w której $n+1$ wielomianów L_i stopnia n stanowi bazę przestrzeni wektorowej wielomianów stopnia co najwyżej n. Wzór jest łatwy do zaprogramowania na komputerze, ale koszt obliczeń (złożoność czasowa) jest wysoki z uwagi na dużą liczbę działań arytmetycznych. Mniejszym kosztem można zrealizować tego typu obliczenia, znając współczynniki postaci naturalnej wielomianu

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Bazę stanowią wówczas wielomiany $1, x, x^2, \ldots, x^n$ (potęgi zmiennej x), a warunki interpolacji (1) prowadzą do układu $n+1$ równań liniowych:

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_n x_i^n = y_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

który w zapisie macierzowym wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Macierzą tego układu jest tzw. *macierz Vandermonde'a*. Jest ona nieosobliwa, ale bywa często źle uwarunkowana [1, 2]. Dlatego nie zaleca się rozwiązywania go numerycznie, zwłaszcza że i koszt obliczeń byłby nadmiernie duży.

Wielką zaletą postaci naturalnej wielomianu jest łatwość obliczania jego wartości według tzw. schematu Hornera. Jeśli postać naturalną przedstawimy nieco inaczej:

$$P_n(x) = (\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_0,$$

to nietrudno zauważyć, że obliczanie wartości $w = P_n(t)$ można zaprogramować następująco (Pascal):

```
w := a[n];
for i := n-1 downto 0 do
   w := w*t + a[i];
```

Dowodzi się, że ten sposób postępowania, zwany *algorytmem Hornera*, jest nie tylko numerycznie poprawny, ale i optymalny z punktu widzenia złożoności obliczeniowej [1].

Szczególnie użyteczna jest postać Newtona wielomianu interpolacyjnego. Wtedy bazę stanowią wielomiany

$$N_i(x) = \begin{cases} 1 & (i = 0) \\ (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1}) & (i = 1, 2, \dots, n), \end{cases} \tag{4}$$

przy której *wzór interpolacyjny Newtona* ma postać

$$\begin{aligned} P_n(x) &= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ &\qquad + c_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) = \\ &= \sum_{i=0}^{n} c_i N_i(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j). \end{aligned}$$

Rekurencja (4) orzeka, że każdy z wielomianów $N_1, N_2, \dots, N_n$ powstaje z poprzedniego przez dołączenie kolejnego czynnika. Z warunków interpolacji (1) i wzoru Newtona wynika, że współczynniki $c_0, c_1, \dots, c_n$ można wyznaczać kolejno z zależności:

$$\begin{aligned} y_0 &= c_0, \\ y_1 &= c_0 + c_1 N_1(x_1), \\ y_2 &= c_0 + c_1 N_1(x_2) + c_2 N_2(x_2), \\ \dots &\dots \dots \\ y_n &= c_0 + c_1 N_1(x_n) + c_2 N_2(x_n) + \dots + c_{n-1} N_{n-1}(x_n) + c_n N_n(x_n). \end{aligned} \tag{5}$$

Nie warto jednak stosować tej metody, bo jest zbyt kosztowna w porównaniu z algorytmem wyznaczania tzw. ilorazów różnicowych. Warto jednak zauważyć, że znając współczynniki wielomianu interpolacyjnego Newtona, można również zaprogramować obliczanie jego wartości według schematu Hornera:

```
w := c[n];
for i := n-1 downto 0 do
   w := w*(t-x[i]) + c[i];
```

Ilorazy różnicowe

Współczynniki c_k we wzorze interpolacyjnym Newtona zależą jedynie od węzłów $x_0, x_1, \dots, x_k$ i wartości $y_0, y_1, \dots, y_k$ funkcji f w tych węzłach. Aby tę zależność uwidocznić, przyjęło się współczynniki te oznaczać

$$c_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

i nazywać *ilorazami różnicowymi rzędu k* dla funkcji f i wymienionych węzłów. Przy tych oznaczeniach wzór Newtona ma postać następującą:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_i] N_i(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j). \tag{6}$$

W dalszych rozważaniach potrzebne nam będą ilorazy różnicowe rzędu k dla funkcji f i dowolnych parami różnych węzłów $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}$:

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] \quad (k = 0, 1, \ldots, n, \quad i = 0, 1, \ldots, n-k).$$

Ilorazy różnicowe rzędu zerowego definiujemy jako wartości funkcji f w węzłach:

$$f[x_0] = y_0, \; f[x_1] = y_1, \; \ldots, \; f[x_n] = y_n.$$

Z pierwszej i drugiej równości (5) wynika, że występujące we wzorze Newtona ilorazy różnicowe rzędu zerowego i pierwszego mają postać:

$$f[x_0] = y_0, \quad f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}.$$

Druga z tych równości stanowi szczególny przypadek ogólnej zależności umożliwiającej rekurencyjne obliczanie ilorazów wyższych rzędów.

Twierdzenie 2. *Ilorazy różnicowe spełniają zależność:*

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n, \quad i = 0, 1, \ldots, n-k).$$

Dowód. Niech $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dla ustalenia uwagi skoncentrujmy się na przypadku $i = 0$, ograniczając tym samym rozważania do węzłów $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Rozpatrzmy trzy wielomiany interpolacyjne:

- p_k stopnia co najwyżej k interpolujący f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_k$,
- p_{k-1} stopnia co najwyżej $k-1$ interpolujący f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$,
- q_{k-1} stopnia co najwyżej $k-1$ interpolujący f w węzłach $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Zachodzi równość

$$p_k(x) = q_{k-1}(x) + \frac{x - x_k}{x_k - x_0}[q_{k-1}(x) - p_{k-1}(x)],$$

ponieważ lewa i prawa strona określają wielomiany stopnia co najwyżej k interpolujące funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_k$, czyli ten sam wielomian. Ze wzorów (4) i (6) wynika, że wielomian p_k ma przy x^k współczynnik $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$, wielomian p_{k-1} przy x^{k-1} współczynnik $f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]$, a wielomian q_{k-1} przy x^{k-1} współczynnik $f[x_1, x_2, \ldots, x_k]$. Porównanie współczynników obu stron powyższej równości przy x^k daje tożsamość

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

Przyjęte na początku ograniczenie $i = 0$ nie stanowi szkody dla ogólności rozważań, bowiem całe to postępowanie można przeprowadzić w ogólniejszym wariancie węzłów $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-k)$. Inaczej mówiąc, oznaczenia węzłów użyte w powyższej równości nie są istotne, zatem ich zmiana na ogólniejszy wariant daje tożsamość określoną w tezie twierdzenia. $\square$

Znając węzły x_i i wartości funkcji $y_i = f(x_i)$, czyli ilorazy $f[x_i]$ zerowego rzędu, można na podstawie twierdzenia 2 utworzyć trójkątną tablicę ilorazów różnicowych wyższych rzędów:

$$\begin{array}{lllll}
x_0 & f[x_0] & & & \\
x_1 & f[x_1] & f[x_0, x_1] & & \\
x_2 & f[x_2] & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \\
x_n & f[x_n] & f[x_{n-1}, x_n] & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] \ \dots & f[x_0, x_1, \dots, x_n]
\end{array}$$

Współczynniki c_i są ilorazami różnicowymi leżącymi na głównej przekątnej tej tablicy. Ich obliczanie można łatwo realizować na komputerze, używając jednowymiarowej tablicy c:

```
for i := 0 to n do
   c[i] := y[i];
for j := 1 to n do
   for i := n downto j do
      c[i] := (c[i]-c[i-1])/(x[i]-x[i-j]);
```

Wstępnie elementom tablicy c przypisywane są wartości funkcji f w węzłach, czyli ilorazy różnicowe zerowego rzędu. Następnie, w kolejności od dołu do góry, obliczane są ilorazy wyższych rzędów. Dzięki takiej organizacji obliczeń tablica zawiera w każdym kroku tylko te ilorazy, które będą później potrzebne. Na końcu zawiera współczynniki występujące we wzorze Newtona.

Zaleca się, by węzły interpolacji były uporządkowane od najmniejszego do największego (lub odwrotnie). Udowodniono bowiem, że wówczas algorytm jest numerycznie poprawny i jednocześnie możliwie dokładny [1].

Przykład 2. Wielomian P_3 stopnia co najwyżej 3 spełniający warunki interpolacji dla punktów (x_i, y_i) określonych w przykładzie 1 wyznaczymy teraz, posługując się wzorem interpolacyjnym Newtona. Zaczynamy od utworzenia trójkątnej tablicy ilorazów różnicowych:

x_i	$f[x_i]$	ilorazy rzędów 1–3		
-4	-4			
-1	1	$\frac{5}{3}$		
0	-2	-3	$-\frac{7}{6}$	
2	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{1}{2}$

Przekątna tej tablicy zawiera ilorazy występujące we wzorze (6), zatem

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= -4N_0(x) + \frac{5}{3}N_1(x) - \frac{7}{6}N_2(x) + \frac{1}{2}N_3(x) = \\
&= -4 + \frac{5}{3}(x+4) - \frac{7}{6}(x+4)(x+1) + \frac{1}{2}(x+4)(x+1)(x-0) = \\
&= \frac{1}{2}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{13}{6}x - 2.
\end{aligned}$$

Błąd interpolacji wielomianowej

Twierdzenie 3. *Jeżeli $f \in C^{n+1}[a,b]$ i wielomian P_n stopnia co najwyżej n interpoluje funkcję f w $n+1$ parami różnych punktach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ przedziału $[a,b]$, to dla każdego $x \in [a,b]$ istnieje takie $\xi \in (a,b)$, że*

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n). \tag{7}$$

Dowód. Wystarczy udowodnić twierdzenie dla x różnego od wszystkich węzłów, gdyż w przeciwnym razie obie strony powyższej równości są równe zero. Niech

$$w(t) = \prod_{i=0}^{n}(t-x_i).$$

Funkcja

$$g(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x)-P_n(x)}{w(x)}w(t)$$

zmiennej t jest klasy $C^{n+1}[a,b]$ i znika w $n+2$ punktach $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$. Na podstawie twierdzenia Rolle'a funkcja g' ma w (a,b) co najmniej $n+1$ zer, funkcja g'' ma tam co najmniej n zer itd., a funkcja $g^{(n+1)}$ co najmniej jedno zero. Oznaczając je przez ξ, otrzymujemy

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - P_n^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x)-P_n(x)}{w(x)}w^{(n+1)}(\xi),$$

a ponieważ $P_n^{(n+1)} \equiv 0$ i $w^{(n+1)} \equiv (n+1)!$, zachodzi równość

$$f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x)-P_n(x)}{w(x)}(n+1)! = 0,$$

co daje tezę twierdzenia. □

Przykład 3. W celu oszacowania błędu przybliżenia funkcji $f(x) = \sin(\pi x)$ w przedziale $[-1,1]$ wielomianem interpolacyjnym P_3 stopnia 3 dla węzłów

$$x_0 = -1,\ x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 1$$

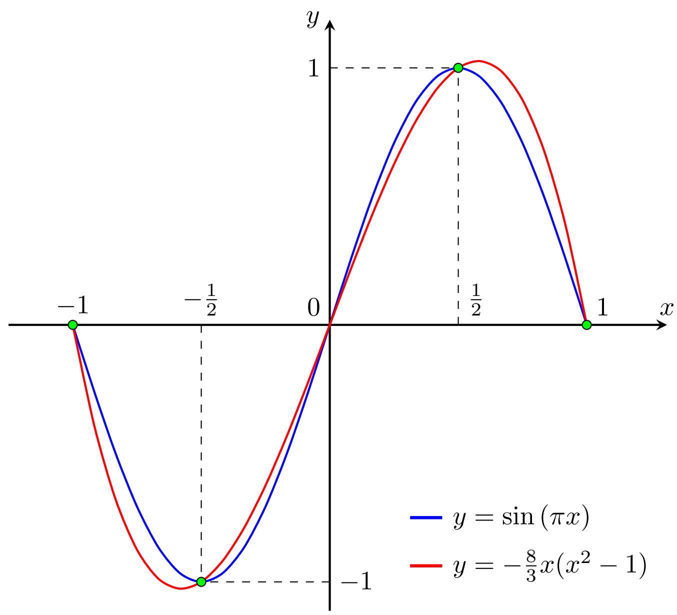
zauważmy najpierw, że $f^{(4)}(x) = \pi^4 \sin(\pi x)$. Na mocy twierdzenia 3 mamy więc dla dowolnego $x \in [-1,1]$

$$\begin{aligned} f(x) - P_3(x) &= \frac{\sin^{(4)}(\pi\xi)}{4!}\Big(x+1\Big)\Big(x+\frac{1}{2}\Big)\Big(x-\frac{1}{2}\Big)\Big(x-1\Big) = \\ &= \frac{\pi^4 \sin(\pi\xi)}{24}\Big(x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4}\Big), \end{aligned}$$

gdzie ξ jest liczbą zależną od x zawartą między -1 i 1. Nietrudno sprawdzić, posługując się metodami analizy matematycznej, że wielomian czwartego stopnia występujący po prawej stronie powyższej równości przyjmuje w punktach $-\frac{\sqrt{10}}{4}$, 0 i $\frac{\sqrt{10}}{4}$ wartości ekstremalne $-\frac{9}{64}$, $\frac{1}{4}$ i $-\frac{9}{64}$. Jego wartości bezwzględne w przedziale $[-1, 1]$ są więc nie większe niż $\frac{1}{4}$. Zatem

$$|f(x) - P_3(x)| \leqslant \frac{\pi^4}{96} \approx 1.0147.$$

Jak widać, uzyskany wynik jest rozczarowujący. Oczywiście dokładny błąd interpolacji mieści się w uzyskanym zakresie, ale czyżby był aż tak duży?



Rysunek 3: Interpolacja funkcji $\sin{(\pi x)}$ wielomianem 3 stopnia

Aby uzyskać odpowiedź na postawione pytanie, znajdujemy jawną postać wielomianu P_3. Najpierw tworzymy tablicę ilorazów różnicowych:

x_i	$f[x_i]$	ilorazy rzędów 1–3		
-1	0			
$-\frac{1}{2}$	-1	-2		
$\frac{1}{2}$	1	2	$\frac{8}{3}$	
1	0	-2	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{8}{3}$

po czym ze wzoru Newtona (6) otrzymujemy

$$P_3(x) = -\frac{8}{3}x(x^2 - 1)$$

(por. rys. 3). Na koniec, posługując się prostym programem komputerowym obliczającym różnicę wartości obydwu funkcji w dużej liczbie punktów przedziału $[-1, 1]$, znajdujemy rzeczywisty błąd interpolacji wynoszący 0.1808.

Interpolacja Hermite'a

Interpolacja Hermite'a, zwana również *interpolacją z węzłami wielokrotnymi*, polega na poszukiwaniu wielomianu p możliwie najniższego stopnia, który w parami różnych węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ma dane nie tylko wartości pewnej funkcji f, ale i wartości jej pochodnych [1, 2]. W prostym wariancie takiej interpolacji uwzględnia się wartości funkcji i wartości jej pierwszej pochodnej:

$$p(x_i) = f(x_i), \quad p'(x_i) = f'(x_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{8}$$

Przez analogię do interpolacji z węzłami jednokrotnymi dowodzi się wówczas, że zagadnienie ma jednoznaczne rozwiązanie, a gdy f jest klasy $C^{2n+2}[a, b]$ i węzły należą do $[a, b]$, to dla każdego $x \in [a, b]$ istnieje takie $\xi \in [a, b]$, że

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}(x - x_0)^2(x - x_1)^2 \ldots (x - x_n)^2. \tag{9}$$

Przykładem interpolacji prostej Hermite'a jest zadanie, w którym poszukiwany jest wielomian p interpolujący funkcję f i jej pochodną f' w dwóch różnych punktach $x_0 = a$ i $x_1 = b$.

Przykład 4. Funkcję $f(x) = \sin(\pi x)$ przybliżymy w każdym z przedziałów $[-1, -\frac{1}{2}]$, $[-\frac{1}{2}, 0]$, $[0, \frac{1}{2}]$ i $[\frac{1}{2}, 1]$ odrębnym wielomianem 3 stopnia (interpolacja przedziałowa) spełniającym w końcach stosownego przedziału warunki (8).

Na początek skoncentrujmy się na przedziale $[0, \frac{1}{2}]$, dla którego szukamy wielomianu

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

takiego, że

$$p(0) = 0, \quad p'(0) = \pi, \quad p\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \quad p'\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Pochodna tego wielomianu ma postać

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Z warunków nałożonych na wielomian p i jego pochodną p' w punkcie 0 wynika, że $d = 0$ i $c = \pi$. Stąd i warunków nałożonych na p i p' w punkcie $\frac{1}{2}$ otrzymujemy układ dwóch równań liniowych

$$\begin{cases} \dfrac{a}{8} + \dfrac{b}{4} = 1 - \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] \dfrac{3a}{4} + b = -\pi, \end{cases}$$

którego rozwiązaniami są $a = 4(\pi - 4)$ i $b = 4(3 - \pi)$. Zatem

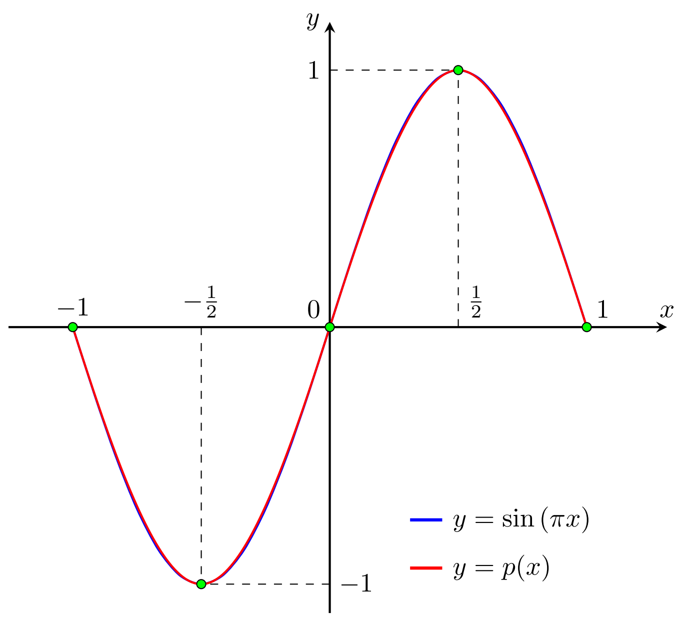
$$p(x) = 4(\pi - 4)x^3 + 4(3 - \pi)x^2 + \pi x \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \tfrac{1}{2}\right). \tag{10}$$

Dla przedziału $[\frac{1}{2}, 1]$ można by powtórzyć to samo rozumowanie, z małymi zmianami. Zważywszy jednak na to, że funkcja f jest w przedziale $[0, 1]$ symetryczna względem prostej $x = \frac{1}{2}$, tzn. $f(x) = f(1 - x)$, jej przybliżenie powinno też mieć tę właściwość. Wobec tego

$$\begin{aligned} p(x) &= p(1-x) = \\ &= a(1-x)^3 + b(1-x)^2 + c(1-x) = \\ &= a(1 - 3x + 3x^2 - x^3) + b(1 - 2x + x^2) + c(1-x) = \\ &= -ax^3 + (3a+b)x^2 - (3a+2b+c)x + (a+b+c) = \\ &= -4(\pi-4)x^3 + [12(\pi-4) + 4(3-\pi)]x^2 + \\ &\qquad\quad -[12(\pi-4) + 8(3-\pi) + \pi]x + [4(\pi-4) + 4(3-\pi) + \pi], \end{aligned}$$

skąd

$$p(x) = 4(4 - \pi)x^3 + 4(2\pi - 9)x^2 + (24 - 5\pi)x + (\pi - 4) \quad \left(\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\right). \tag{11}$$



Rysunek 4: Interpolacja przedziałowa Hermite'a funkcji $\sin(\pi x)$

Przejdźmy teraz do przedziałów $[-1, -\frac{1}{2}]$ i $[-\frac{1}{2}, 0]$. Ponieważ funkcja f jest nieparzysta, tzn. $f(-x) = -f(x)$ dla $x \in [-1, 1]$, dlatego rozsądne wydaje się skorzystanie ze wzorów (10) i (11). Nieparzystość przybliżenia p oznacza bowiem, że gdy w obu wzorach zmienimy znak współczynników przy x do potęgi parzystej na przeciwny, pierwszy da przybliżenie funkcji f w przedziale $[-\frac{1}{2}, 0]$, zaś drugi w przedziale $[-1, -\frac{1}{2}]$. Zatem ostatecznie

$$p(x) = \begin{cases} 4(4-\pi)x^3 - 4(2\pi - 9)x^2 + (24 - 5\pi)x - \pi + 4 & (-1 \leqslant x < -\frac{1}{2}) \\ 4(\pi - 4)x^3 - 4(3-\pi)x^2 + \pi x & (-\frac{1}{2} \leqslant x < 0) \\ 4(\pi - 4)x^3 + 4(3-\pi)x^2 + \pi x & (0 \leqslant x < \frac{1}{2}) \\ 4(4-\pi)x^3 + 4(2\pi - 9)x^2 + (24 - 5\pi)x + \pi - 4 & (\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1) \end{cases}$$

lub

$$p(x) \approx \begin{cases} 3.43363x^3 + 10.86726x^2 + 8.29204x + 0.85841 & (-1 \leqslant x < -\frac{1}{2}) \\ -3.43363x^3 + 0.56637x^2 + 3.14159x & (-\frac{1}{2} \leqslant x < 0) \\ -3.43363x^3 - 0.56637x^2 + 3.14159x & (0 \leqslant x < \frac{1}{2}) \\ 3.43363x^3 - 10.86726x^2 + 8.29204x - 0.85841 & (\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1). \end{cases}$$

Jak pokazuje rysunek 4, przybliżenie p złożone z czterech wielomianów stopnia 3, otrzymane metodą interpolacji prostej Hermite'a, dość dobrze przybliża funkcję $y = \sin(\pi x)$ dla $x \in [-1, 1]$. Czy potwierdza to równość (9)?

Symetria f i p względem prostej $x = -\frac{1}{2}$ w przedziale $[-1, 0]$, względem prostej $x = \frac{1}{2}$ w przedziale $[0, 1]$ i względem punktu $(0, 0)$ w przedziale $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ usprawiedliwia ograniczenie rozważań do przedziału $[0, \frac{1}{2}]$, w którym równość ta ma postać

$$f(x) - p(x) = \frac{\sin^{(4)}(\pi\xi)}{4!} x^2 \Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{\pi^4 \sin(\pi\xi)}{24} x^2 \Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2.$$

Łatwo sprawdzić, że wielomian $x^2(x - \frac{1}{2})^2$ przyjmuje w punktach 0, $\frac{3-\sqrt{7}}{4}$ i $\frac{1}{2}$ wartości ekstremalne 0, $\frac{23-8\sqrt{7}}{64}$ i 0. Wynika stąd, że dla $x \in [-1, 1]$

$$|f(x) - p(x)| \leqslant \frac{\pi^4(23 - 8\sqrt{7})}{24 \cdot 64} \approx 0.1163.$$

Oszacowanie to jest jednak grube, rzeczywisty błąd przybliżenia wynosi 0.0108.

Uwagi końcowe

W oszacowaniu błędu interpolacji $f(x) - P_n(x)$ można optymalizować czynnik $(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$, dobierając węzły w szczególny sposób. Zadanie to badał rosyjski matematyk Pafnutij L. Czebyszew (1821–1894). Rozwiązanie wyraża się poprzez wielomiany noszące jego imię [2, 3]:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_n(x) &= 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad (n = 2, 3, \ldots). \end{aligned}$$

Tablicę ilorazów różnicowych można łatwo rozszerzać o kolejne węzły i w ten sposób szukać wielomianu interpolacyjnego dającego lepszą dokładność. Dowodzi się, że skonstruowanie tablicy ilorazów różnicowych i obliczanie wartości lub współczynników wielomianu interpolacyjnego ze wzoru Newtona jest bardziej opłacalne, niż obliczanie ich ze wzoru Lagrange'a [1].

Istnieje wiele efektywnych algorytmów przechodzenia pomiędzy różnymi bazami wielomianowymi, m. in. pomiędzy bazą naturalną, Lagrange'a, Newtona i Czebyszewa [1, 3].

Literatura

[1] Jankowscy J. i M.: *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, część 1, WNT, Warszawa 1981.

[2] Kincaid D., Cheney W.: *Analiza numeryczna*, WNT, Warszawa 2006.

[3] Paszkowski S.: *Zastosowania numeryczne wielomianów i szeregów Czebyszewa*, PWN, Warszawa 1975.

[4] Stoer J.: *Wstęp do metod numerycznych*, tom 1, PWN, Warszawa 1979.

* * *